

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”****Ediția a XXVII-a****ETAPA NAȚIONALĂ – 17 mai 2025****Clasa a X-a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii****BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE****Subiectul 1:**Fie a un număr real pozitiv, iar n cel mai mare număr natural pentru care

$$\log_{\frac{1}{3}} n + \log_{\frac{n}{3}} n > 0.$$

Determinați termenul dezvoltării $(\sqrt{a} + \sqrt[3]{a})^n$ care îl conține pe a^3 .**Soluție:**Inecuația $\log_{\frac{1}{3}} n + \log_{\frac{n}{3}} n > 0$, $n \neq 0$, $n \neq 1$, $n \neq 3$, se rescrie sub forma $-\log_3 n + \frac{\log_3 n}{\log_3 n - 1} > 0$.Notăm $\log_3 n = t$; cum n este un număr natural nenul, înseamnă că $t \geq 0$ și, în plus, impunem condiția $t \neq 1$.Rezolvând inecuația $\frac{t^2 - 2t}{t - 1} < 0$, obținem $t \in (1, 2)$ **3p**Cum n este cel mai mare număr natural pentru care $\log_{\frac{1}{3}} n + \log_{\frac{n}{3}} n > 0$, deducem că $n = 8$ **1p**

$$T_{k+1} = C_8^k \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{8-k} \cdot a^{\frac{k}{3}} = C_8^k \cdot a^{\frac{24-k}{6}} \text{ îl conține pe } a^3 \text{ pentru } k = 6 \text{ } \mathbf{2p}$$

$$T_7 = 28a^3 \text{ } \mathbf{1p}$$

Subiectul 2:Raportăm planul la un reper cartezian xOy .În triunghiul ABC se cunosc: coordonatele unui vârf, $A(5, 1)$, ecuația unei mediane, $y = 2x$ și ecuația unei înălțimi, $y = -x$.**a)** Calculați aria triunghiului ABC , știind că mediana și înălțimea ale căror ecuații le cunoaștem pleacă dintr-un același vârf.**b)** Determinați coordonatele vârfurilor triunghiului ABC , știind că mediana și înălțimea ale căror ecuații le cunoaștem pleacă din vârfuri diferite.**Soluție:**Notăm dreptele ale căror ecuații sunt date în enunț: $d_1: y = 2x$, $d_2: y = -x$. Vârful A nu aparține acestor drepte, deoarece coordonatele sale nu verifică cele două ecuații **1p**

a) Fie B vârful prin care trec cele două linii importante; atunci $\{B\} = d_1 \cap d_2 \Rightarrow B(0,0)$. Notăm cu M mijlocul lui AC și fie $C(a,b)$. Rezultă că $M\left(\frac{5+a}{2}, \frac{1+b}{2}\right)$ și, cum M aparține medianei $d_1: y=2x$, deducem că $b=2a+9$ **1p**

Deoarece înălțimea d_2 este perpendiculară pe AC , avem $m_{AC} \cdot m_{d_2} = -1 \Leftrightarrow \frac{2a+8}{a-5} \cdot (-1) = -1$. Obținem coordonatele celui de-al treilea vârf: $C(-13, -17)$ **1p**

Se observă că $A_{ABC} = A_{BCP} + A_{ABP}$, unde $\{P\} = AC \cap Ox$. Ecuația dreptei AC este $x-y-4=0$, coordonatele punctului P sunt $P(4, 0)$, așadar $A_{ABC} = \frac{|-17| \cdot 4}{2} + \frac{1 \cdot 4}{2} = 36$ **2p**

b) Fie $B(b, 2b) \in d_1, C(c, -c) \in d_2$. Mijlocul $M\left(\frac{5+c}{2}, \frac{1-c}{2}\right)$ al laturii AC aparține dreptei d_1 , de unde $c=-3$, iar punctul C are coordonatele $C(-3, 3)$ **1p**

Din relația $m_{AB} \cdot m_{d_2} = -1$ obținem $\frac{2b-1}{b-5} = 1$, prin urmare $b=-4$, iar coordonatele punctului B sunt $B(-4, -8)$ **1p**

Subiectul 3:

Într-o cabană se folosesc simultan patru butelii identice, fiecare într-un anumit scop.

S-a observat că, folosite în mod obișnuit, fiecare pentru a alimenta câte un anumit consumator, buteliile se golească după 15 zile, 20 zile, 30 zile, respectiv 60 zile.

Este posibil să schimbăm buteliile de la un consumator la altul, după un număr de zile, astfel încât ele să se golească simultan? După câte zile se vor goli și cum ar trebui să procedăm?

Soluție:

Notăm cu A, B, C, D cei patru consumatori.

Dacă D consumă x litri de gaz pe zi, înseamnă că butelia care îl alimentează în mod obișnuit conține $60x$ litri. Cum cele patru butelii sunt identice, ele vor conține, în total, $240x$ litri de gaz.

Ținând cont de datele problemei, deducem că A consumă zilnic $4x$ litri de gaz, B consumă $3x$ litri de gaz pe zi, iar C consumă $2x$ litri de gaz pe zi. În total, cei patru consumatori au nevoie de $10x$ litri de gaz pe zi **3p**

Dacă dorim ca cele patru butelii să se golească simultan, acest eveniment se va întâmpla după $240x : (10x) = 24$ de zile **1p**

Rămâne să găsim o modalitate de a schimba buteliile între ele, astfel încât ele să se golească simultan, după 24 de zile.

O variantă (cea mai simplă) este următoarea: după 12 zile de funcționare obișnuită, schimbăm între ele buteliile care alimentează consumatorii A și D și schimbăm între ele buteliile care alimentează consumatorii B și C .

În 12 zile, cei patru consumatori au nevoie de următoarele cantități de gaz (măsurate în litri): $A \rightarrow 12 \cdot 4x = 48x$, $B \rightarrow 12 \cdot 3x = 36x$, $C \rightarrow 12 \cdot 2x = 24x$, $D \rightarrow 12x$. În buteliile care i-au alimentat în primele 12 zile rămân $60x - 48x = 12x$, $60x - 36x = 24x$, $60x - 24x = 36x$, respectiv $60x - 12x = 48x$ litri de gaz, iar aceste cantități sunt

cele necesare pentru alimentarea corectă a celor patru consumatori pentru restul de 12 zile, dacă se fac interschimbările anunțate mai sus **3p**

Subiectul 4:

Spunem că o funcție $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ este *remarcabilă* dacă f este injectivă și are proprietatea:

$$f\left(\frac{x}{f(y)}\right) = \frac{x}{f(x\sqrt{y})}, \forall x, y \in (0, \infty).$$

a) Dacă f este o funcție remarcabilă, arătați că $f(1) = 1$.

b) Determinați toate funcțiile remarcabile.

Soluție:

a) Fie $f(1) = a, a \in (0, \infty)$.

Pentru $x = a$ și $y = 1$ obținem $f(1) = \frac{a}{f(a)}$, deci $f(a) = 1$. Pentru $x = a^2$ și $y = 1$ obținem $f(a) = \frac{a^2}{f(a^2)}$, deci

$$f(a^2) = a^2. \text{ Pentru } x = a^3 \text{ și } y = 1 \text{ obținem } f(a^2) = \frac{a^3}{f(a^3)}, \text{ deci } f(a^3) = a.$$

Astfel, $f(a^3) = f(1)$ și, cum f este injectivă, rezultă că $a = 1$, deci $f(1) = 1$ **5p**

b) Pentru $y = 1$ și $x \in (0, \infty)$ obținem $f(x) = \frac{x}{f(x)}$, deci $f(x) = \sqrt{x}$ sau $f(x) = -\sqrt{x}$. Cum $f(x) \in (0, \infty)$,

înseamnă că $f(x) = \sqrt{x}$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$ **1p**

Funcția $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ este injectivă și are proprietatea din enunț, deci aceasta este unica funcție remarcabilă **1p**

Soluție alternativă:

Problema poate fi rezolvată și fără condiția de injectivitate.

Știm că $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ și că

$$f\left(\frac{x}{f(y)}\right) = \frac{x}{f(x\sqrt{y})}, \forall x, y \in (0, \infty).$$

a) Fie $a = f(1)$. Cum $f(1) > 0$, atunci $a > 0$ și obținem astfel că există $f(a), \sqrt{a}, \frac{1}{a}$ și $f(\sqrt{a})$.

1. Alegem $x = f(1)$ și $y = 1$. Atunci:

$$f\left(\frac{f(1)}{f(1)}\right) = \frac{f(1)}{f(f(1) \cdot \sqrt{1})} \Rightarrow f(1) = \frac{f(1)}{f(f(1))} \stackrel{f(1)>0}{\Rightarrow} f(f(1)) = 1 \stackrel{f(1)=a}{\Rightarrow} f(a) = 1.$$

2. Alegem $x=1$ și $y=a$. Atunci:

$$f\left(\frac{1}{f(a)}\right) = \frac{1}{f(1 \cdot \sqrt{a})} \stackrel{f(a)=1}{\Rightarrow} f\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{f(\sqrt{a})} \Rightarrow f(1) = \frac{1}{f(\sqrt{a})} \stackrel{f(1)=a}{\Rightarrow} f(\sqrt{a}) = \frac{1}{a}.$$

3. Alegem $x=\sqrt{a}$ și $y=a$. Atunci:

$$f\left(\frac{\sqrt{a}}{f(a)}\right) = \frac{\sqrt{a}}{f(\sqrt{a} \cdot \sqrt{a})} \stackrel{f(a)=1}{\Rightarrow} f\left(\frac{\sqrt{a}}{1}\right) = \frac{\sqrt{a}}{f(a)} \stackrel{f(a)=1}{\Rightarrow} f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}.$$

Am obținut astfel că:

$$f(\sqrt{a}) = \frac{1}{a} = \sqrt{a} \Rightarrow a\sqrt{a} = 1 \Rightarrow a = 1 \dots\dots\dots 5p$$

b) Pentru $x \in (0, +\infty)$ și $y=1$, găsim:

$$f\left(\frac{x}{f(1)}\right) = \frac{x}{f(x \cdot \sqrt{1})} \stackrel{f(1)=1}{\Rightarrow} f(x) = \frac{x}{f(x)} \Rightarrow f^2(x) = x, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

Cum $f(x) > 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$, atunci $f(x) = \sqrt{x}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$2p

Notă: Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.